



Distributions à queues épaisses bilatérales et applications en finance avec le package *FatTailsR*

patrice.kiener@inmodelia.com

Conférence R/Rmetrics - 27 juin 2014



Société de service basée à Paris :

- conseil et formation
- modélisation et conception de logiciels

Depuis 2009 :

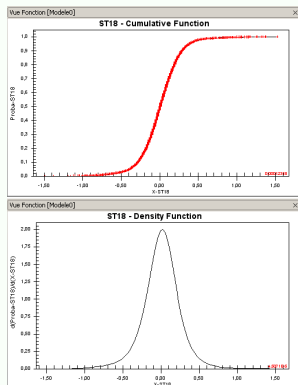
- réseaux de neurones
- plans d'expériences pour modèles non-linéaires

Depuis 2013 :

- distributions à queues épaisses
(à partir d'un travail avec ST-Microelectronics)

Juin 2014 :

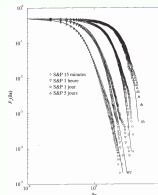
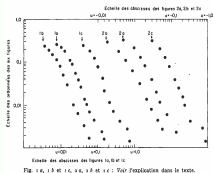
- package **FatTailsR** d'une nouvelle loi de probabilité **explicite, bilatérale, symétrique** (3 paramètres) ou **asymétrique** (4 paramètres) pour les distributions à queues épaisses en finance.
Excellents résultats !!



- 1 Modèles anciens - Idées nouvelles
- 2 Modèles symétriques - Exemples : Or, Société Générale, Vivendi
- 3 Modèles asymétriques - Exemples : S&P 500, Euro-Dollar, VIX
- 4 Package FatTailsR

Distributions à queues épaisses bilatérales

- la quasi-totalité des rendement de cours de bourse sur des longues périodes
- risques de marché (Solvency II, Bâle III), gestion de portefeuille, produits dérivés, ...
- citées par **Mandelbrot (1962)**, approfondies par **Bouchaud et Potters (1997)**, qui utilisent une combinaison de lois unilatérales pour les queues gauche et droite



$$\log \{ \text{Fr} [L(t, T) > -u] \} \sim -\alpha \log u + \log C'(T),$$

$$\log \{ \text{Fr} [L(t, T) < -u] \} \sim -\alpha \log u + \log C''(T).$$

$$L_{\mu}(x) \simeq \frac{\mu A_{\pm}^{\mu}}{|x|^{1+\mu}} \text{ pour } x \rightarrow \pm\infty,$$

FIGURE : (a+b) Prix du coton jour-semaine-mois - (c+d) Indice S&P 15min-jour-semaine-mois

- lois de Student centrées ou décentrées
- fonctions caractéristiques

⇒ Nous proposons des nouvelles distributions explicites symétriques ou asymétriques

Exemple : Indice S&P 500

⇒ Nous proposons des nouvelles distributions explicites symétriques ou asymétriques

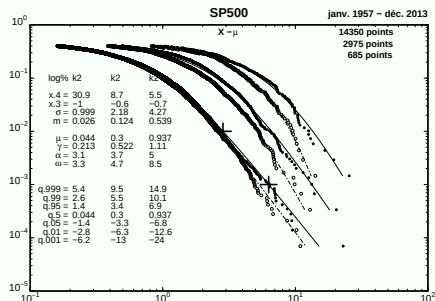
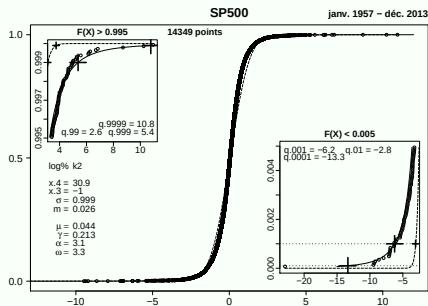


FIGURE : Indice S&P 500 : (a) Fonction de répartition des logrendements (b) Vue Log-Log jour-semaine-mois

Considérons la fonction logistique qui a des queues moins épaisses que la Gaussienne :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Il est remarquable que la combinaison de 2 fonctions asymétriques e^{-x} et $\frac{1}{1 + e^{-x}}$ conduisent à une fonction parfaitement symétrique. Ceci découle à la propriété fondamentale de l'exponentielle $e^{-x}e^x = 1$ qui entraîne $F(-x) = 1 - F(x)$ et pour la fonction de densité : $f(x) = F(x)F(-x)$

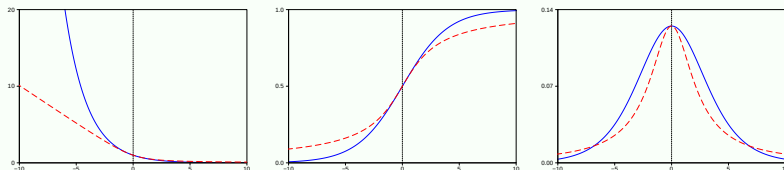


FIGURE : (a) Exp et hp (b) logis et logishp (c) dlogis et dlogishp

Considérons la fonction logistique qui a des queues moins épaisses que la Gaussienne :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Il est remarquable que la combinaison de 2 fonctions asymétriques e^{-x} et $\frac{1}{1 + \dots}$ conduisent à une fonction parfaitement symétrique. Ceci découle à la propriété fondamentale de l'exponentielle $e^{-x}e^x = 1$ qui entraîne $F(-x) = 1 - F(x)$ et pour la fonction de densité : $f(x) = F(x)F(-x)$

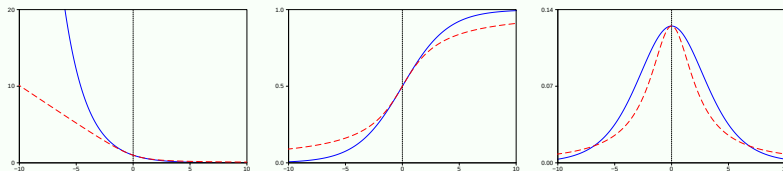


FIGURE : (a) Exp et hp (b) logis et logishp (c) dlogis et dlogishp

Nous proposons d'utiliser les autre courbes qui vérifient la propriété $y(-x)y(x) = 1$:

- les **hyperboles simples**
- les **hyperboles puissance** de paramètre κ qui permettent la construction de fonctions de type logistique ayant une convergence en $|x|^{-\kappa}$

Hyperboles puissance

Nous appelons *hyperboles puissance* les fonctions positives qui vérifient :

Equation générique des hyperboles puissance

$$\left(y^{1/\kappa} + \frac{X - \mu}{\gamma\kappa}\right) y^{1/\kappa} = 1 \quad (1)$$

Elles admettent pour solution les courbes d'équation :

$$y(X, \mu, \gamma, \kappa) = \left(-\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa} + \sqrt{\left(\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa}\right)^2 + 1}\right)^\kappa = e^{\kappa \log\left(-\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa} + \sqrt{\left(\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa}\right)^2 + 1}\right)}$$

soit :

Hyperboles puissance

$$y(X, \mu, \gamma, \kappa) = e^{-\kappa \operatorname{asinh}\left(\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa}\right)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} e^{-\frac{X - \mu}{2\gamma}} \quad (2)$$

Pour $\kappa = 1$, on retrouve l'hyperbole simple

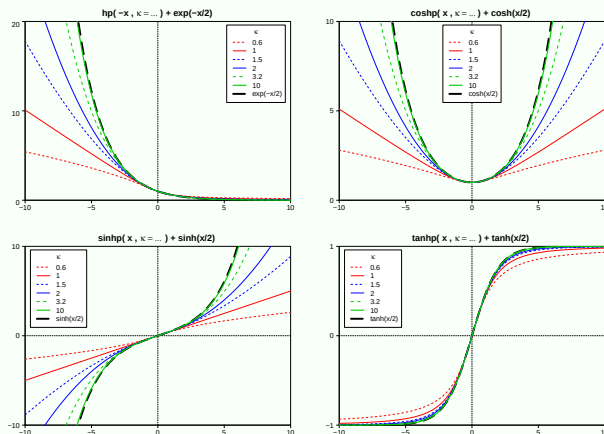


FIGURE : (a) Hyperbole puissance - $\exp hp_{\kappa}(-x) = e^{-\kappa \operatorname{asinh}(\frac{x}{2\kappa})} \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}}$

(b) Cosinus hyperbolique puissance - $\cosh p_{\kappa}(x) = \cosh \left[\kappa \operatorname{asinh}(\frac{x}{2\kappa}) \right] \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} \cosh(\frac{x}{2})$

(c) Sinus hyperbolique puissance - $\sinh p_{\kappa}(x) = \sinh \left[\kappa \operatorname{asinh}(\frac{x}{2\kappa}) \right] \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} \sinh(\frac{x}{2})$

(d) Tangente hyperbolique puissance - $\tanh p_{\kappa}(x) = \tanh \left[\kappa \operatorname{asinh}(\frac{x}{2\kappa}) \right] \xrightarrow{\kappa \rightarrow +\infty} \tanh(\frac{x}{2})$

Hyperboles puissance, fonctions de répartition, densités K1

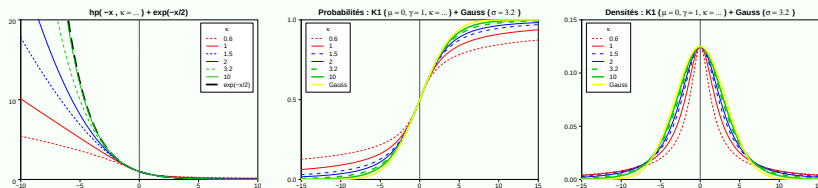


FIGURE : (a) Hyperboles puissance - (b) Fonctions de répartition - (c) Densités

Modèle K1 : fonctions de répartition et densités, $T = \operatorname{asinh}\left(\frac{X-\mu}{2\gamma\kappa}\right)$:

$$F(X) = \frac{1}{1 + e^{-\kappa \operatorname{asinh}\left(\frac{X-\mu}{2\gamma\kappa}\right)}} \quad f(X) = \frac{1}{4\gamma \cosh(T) (1 + \cosh(\kappa T))} \quad f(0) = \frac{1}{8\gamma} \quad (3)$$

F et f vérifient le théorème de Karamata et caractérisent des fonctions à variation lente :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x f(x)}{F(x)} = -\kappa \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x)}{1-F(x)} = \kappa$$

Quantiles et densités (en fonction de la probabilité) :

$$X = \mu + 2\gamma\kappa \sinh\left(\frac{\operatorname{logit}(p)}{\kappa}\right) \quad f(X) = \frac{1}{2\gamma} \operatorname{sech}\left(\frac{\operatorname{logit}(p)}{\kappa}\right) p(1-p)$$

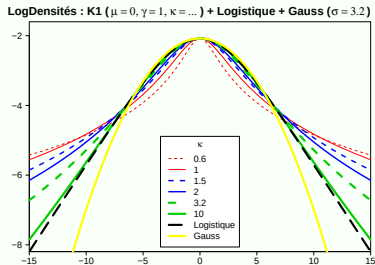
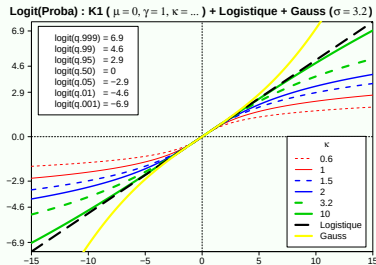


FIGURE : (a) QL-Plot = Quantiles + Logit des fonctions de répartition (b) Logdensités

$$\text{logit } F(X, \mu, \gamma, \kappa) = \kappa \operatorname{asinh} \left(\frac{X - \mu}{2\gamma\kappa} \right)$$

$$\log f(X) = -\log(8\gamma) - \log(\cosh(T)) - 2\log \left(\cosh \left(\frac{\kappa T}{2} \right) \right)$$

Sur le graphique QL-plot (a) ayant en ordonnée le logit des fonctions de répartition :

- en échelle logit : $\text{logit}(0.001, 0.01, 0.05, 0.95, 0.99, 0.999) = (-6.9, -4.6, -2.9, 0, 2.9, 4.6, 6.0)$
- le logit de la fonction logistique($\frac{x}{2}$) est la bissectrice (en pointillé)
- la Gaussienne (traits + points) est concave puis convexe
- les fonctions logistique puissance sont convexes puis concaves ($\Rightarrow$ fonctions subexponentielles)
- les courbures des fonctions logistique puissance, fonctions de κ , sont parfaitement distinctes

Comparaison avec la fonction de Cauchy ($\kappa = 1$)

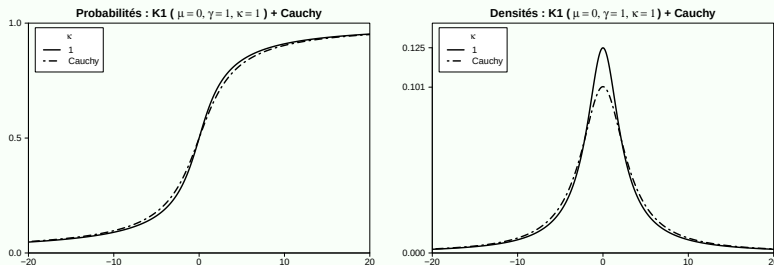


FIGURE : Modèle K1 ($\kappa = 1$) et loi de Cauchy : (a) Probabilités - (b) Densités

$$F(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}} \quad x = \frac{2p-1}{p(1-p)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4}} \quad f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-p}\right)^2}$$

$$G(x) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\pi}\right) \quad x = \pi \tan(\pi(p - 0,5)) \quad g(x) = \frac{1}{\pi^2 + x^2} \quad g(x) = \frac{\cos^2(\pi(p - 0,5))}{\pi^2}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} G(X) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{3x^3} - \frac{\pi^4}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

Comparaison avec la Gaussienne (κ quelconque, $\gamma = 0.313$)

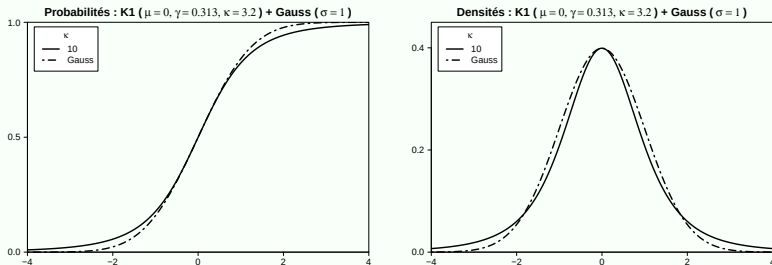


FIGURE : Modèle K1 ($\gamma = 0, 313, \kappa = 3.2$) et loi de Laplace-Gauss ($\sigma = 1$) : (a) Probabilités - (b) Densités

On peut comparer la fonction K1 avec la loi de Laplace-Gauss à pics de densité identiques. L'égalité entre les deux pics de densité en $X = \mu$ donne $\tilde{h} = \frac{\zeta\sigma}{\zeta\gamma} = \frac{8\gamma}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 1$, soit :

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sigma \approx 0,313 \sigma \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \gamma \approx 3,192 \gamma$$

Comparaison avec la loi de Student centrée

Densité de la loi de Student centrée à ν degrés de liberté :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

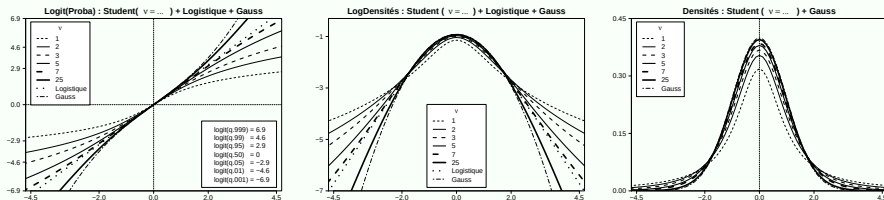


FIGURE : Loïs de Student ($\nu = 1, 2, 3, 5, 7, 25$), Logistique et Laplace-Gauss :

(a) Logit(Probabilités) - (b) Logdensités - (c) Densités

- ν ne prend que des valeurs entières :

$\nu < 1$ est impossible

$\nu = 1 \equiv$ loi de Cauchy. $\nu = 2 \approx \kappa = 2$. $\nu = 8 \approx$ logistique

$\nu = +\infty \equiv$ Gauss

- Les pics de densité (et donc la normalisation) dépendent de ν

- En pratique, on utilisera $\nu = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ qui couvre le domaine subexponentiel

Processus symétriques ($\kappa = 2, \kappa = 3.2, \kappa = 5$ et $\kappa = 10$) x ($\epsilon = 0$)

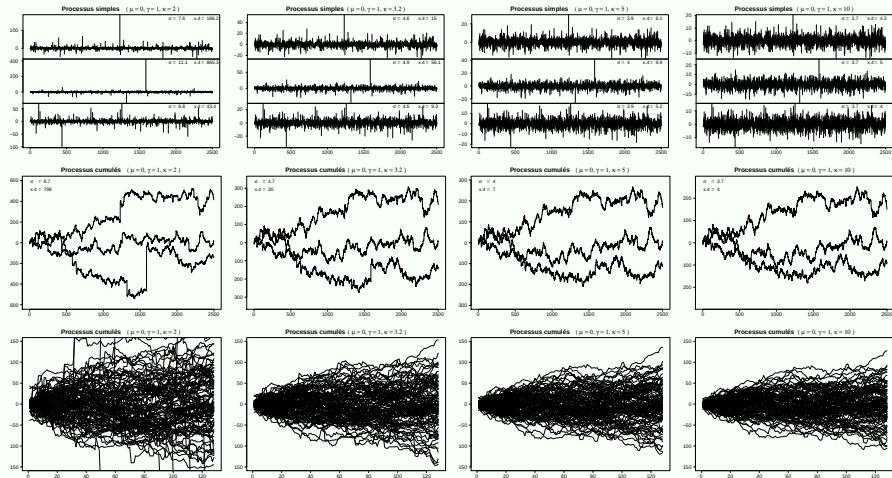


FIGURE : Processus et Processus cumulés : (a) $\kappa = 2$ (b) $\kappa = 3.2$ (c) $\kappa = 5$ (d) $\kappa = 10$

Lingot d'or : $\kappa = 4$, $\epsilon = 0$, symétrie multi-échelle

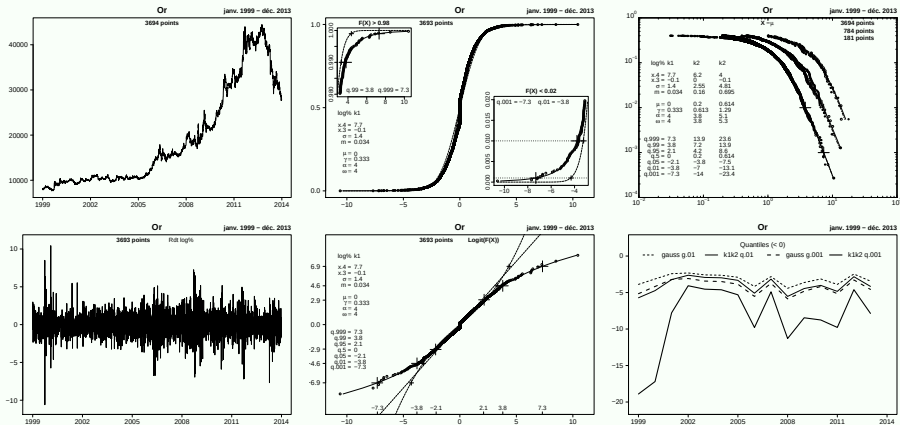


FIGURE : (a) Cours du lingot d'or - (b) 100xlog-rendement du lingot d'or
 (c) Fonction de répartition empirique ($\kappa = \alpha = \omega$) - (d) Logit de la fonction de répartition empirique
 (e) Fonction de répartition empirique en échelle Log-Log sur période jour, semaine, mois
 (f) Risques à 1% et 1‰ sur une période annuelle (250 jours) glissante selon la Gaussienne et la loi K2

Les profils annuels de risque de Société Générale et Vivendi

L'analyse des rendements peut se faire sur des périodes plus courtes, par exemple sur un an, soit environ 250 jours. Le paramètre de queue κ indique la courbure. q.001 est le risque à 1‰.

↓

Société-Générale	x.4	σ	m	μ	γ	κ	q.001	q.01
1992	4.1	2.0	0.29	0.00	0.50	3.8	-11.5	-5.8
1993	3.3	1.4	0.09	0.13	0.38	12.0	-5.4	-3.4
1994	3.4	1.4	-0.12	-0.18	0.40	12.0	-5.9	-3.9
1995	4.9	1.7	0.03	-0.03	0.43	4.6	-8.5	-4.7
1996	3.9	1.3	-0.03	0.00	0.34	7.2	-5.5	-3.4
1997	4.3	1.9	0.15	0.21	0.51	5.4	-9.0	-5.1
1998	4.4	3.3	0.04	0.29	0.86	4.3	-17.1	-9.1
1999	6.0	2.5	0.20	0.23	0.60	3.3	-15.5	-7.2
2000	4.7	2.3	0.05	0.00	0.61	4.7	-11.8	-6.5
2001	4.6	2.3	-0.02	0.00	0.59	4.1	-12.6	-6.6
2002	4.6	3.4	-0.05	0.12	0.86	4.2	-18.1	-9.6
2003	4.3	2.1	0.09	0.00	0.57	5.3	-10.2	-5.9
2004	4.1	1.2	0.02	0.00	0.32	5.8	-5.6	-3.3
2005	3.9	1.0	0.13	0.11	0.28	6.5	-4.5	-2.6
2006	4.9	1.4	0.08	0.00	0.35	4.0	-7.7	-4.0
2007	4.7	1.8	-0.10	0.06	0.47	4.4	-9.4	-5.0
2008	<u>5.2</u>	<u>4.5</u>	-0.37	-0.48	<u>1.08</u>	<u>3.4</u>	<u>-27.8</u>	-13.7
2009	4.7	3.7	0.12	0.40	0.94	4.0	-20.0	-10.2
2010	<u>11.9</u>	3.1	-0.08	-0.10	<u>0.67</u>	<u>2.8</u>	<u>-22.0</u>	-9.4
2011	6.9	4.3	-0.33	-0.31	0.94	2.7	-32.6	-13.7
2012	3.7	3.3	0.20	0.20	0.91	12.0	-13.1	-8.4
2013	4.5	2.2	0.16	0.18	0.58	5.3	-10.3	-5.8
'92-'13	9.4	2.6	0.02	0.00	0.59	3.6	-14.2	-7.0

↑

↓

Vivendi	x.4	σ	m	μ	γ	κ	q.001	q.01
1992	3.2	1.8	0.00	-0.08	0.52	12.0	-7.6	-4.9
1993	2.9	1.4	0.12	0.07	0.40	12.0	-5.8	-3.7
1994	3.6	1.8	-0.14	-0.20	0.49	12.0	-7.4	-4.8
1995	3.2	1.8	-0.02	-0.19	0.51	12.0	-7.6	-5.0
1996	4.5	1.4	0.11	0.00	0.35	4.5	-7.0	-3.8
1997	3.3	1.6	0.11	0.13	0.46	12.0	-6.6	-4.2
1998	4.5	1.9	0.22	0.16	0.51	4.9	-9.4	-5.2
1999	3.0	1.9	0.08	0.00	0.52	12.0	-7.6	-4.9
2000	4.2	2.7	-0.10	-0.06	0.72	5.0	-13.5	-7.6
2001	6.0	2.6	-0.05	-0.14	0.63	3.3	-16.6	-7.9
2002	<u>8.9</u>	<u>6.0</u>	-0.54	-0.67	<u>1.23</u>	<u>2.5</u>	<u>-49.0</u>	-19.5
2003	5.1	2.8	0.09	0.00	0.71	4.0	-15.3	-8.0
2004	4.2	1.5	0.08	0.05	0.40	5.0	-7.4	-4.2
2005	3.7	1.1	0.05	0.08	0.30	10.7	-4.3	-2.7
2006	3.2	1.1	0.04	0.11	0.32	12.0	-4.5	-2.9
2007	3.7	1.1	0.02	0.00	0.30	7.9	-4.7	-3.0
2008	6.8	2.5	-0.12	-0.04	0.59	3.1	-16.7	-7.6
2009	3.6	1.7	-0.04	0.00	0.48	12.0	-7.0	-4.5
2010	9.9	1.7	-0.01	0.08	0.36	2.7	-12.4	-5.1
2011	4.0	1.9	-0.07	0.03	0.52	6.3	-8.7	-5.2
2012	6.9	1.8	0.00	-0.02	0.46	3.8	-10.5	-5.3
2013	3.7	1.5	0.05	0.06	0.40	8.3	-6.2	-3.8
'92-'13	25.5	2.2	-0.01	0.00	0.45	2.9	-14.2	-6.1

↑

Profils annuels des rendements et risques de Vivendi

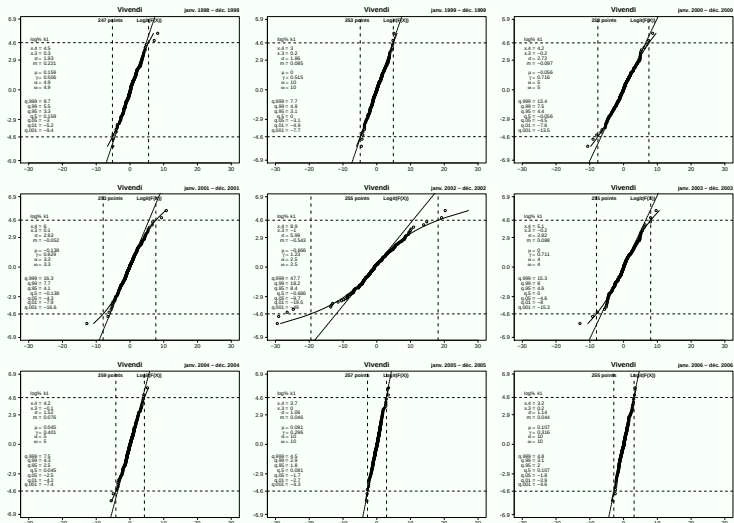


FIGURE : Logit des fonctions de répartition empirique de Vivendi (2002 : Jean-Marie Messier)
 (a) 1998 - (b) 1999 - (c) 2000 - (d) 2001 - (e) 2002 - (f) 2003 - (g) 2004 - (h) 2005 - (i) 2006

Profils annuels des rendements et risques de Société Générale

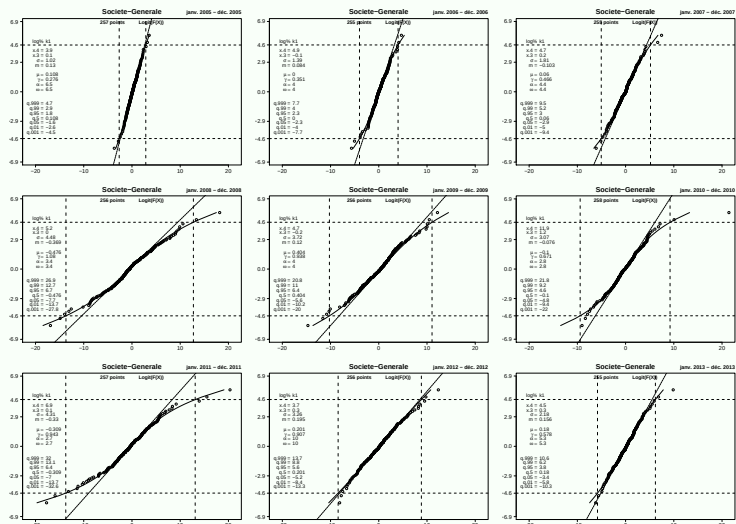


FIGURE : Logit des fonctions de répartition empirique de Société Générale
(a) 2005 - (b) 2006 - (c) 2007 - (d) 2008 - (e) 2009 - (f) 2010 - (g) 2011 - (h) 2012 - (i) 2013

Les profils annuels de risque

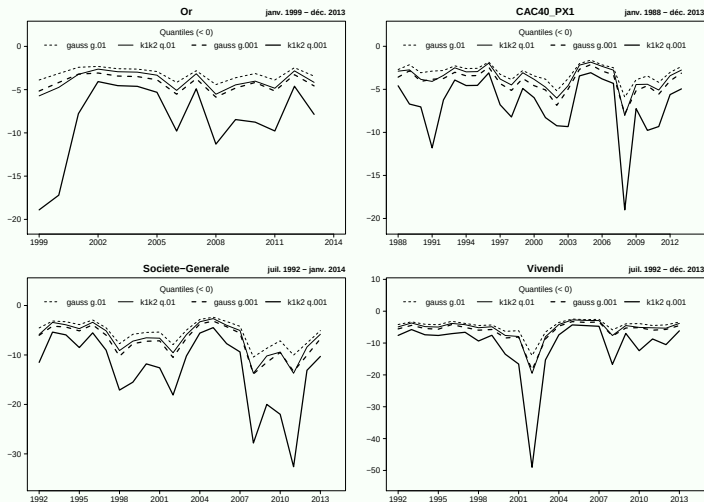


FIGURE : (a) Quantiles de l'or - (b) Quantiles du CAC40 - (c) Quantiles de la Société Générale - (d) Quantiles de Vivendi estimés par la Gaussienne (en pointillé) ou par la fonction K1 (en traits pleins) aux seuils de 1% et 1‰ sur des échantillons d'environ 250 points par année

Comparaison des différents paramètres de la loi K1

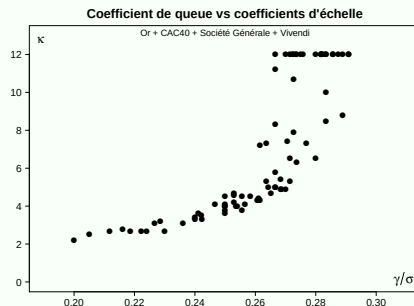
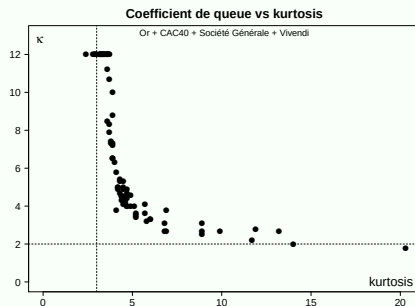
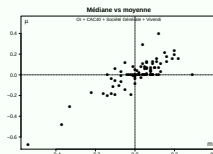


FIGURE : Comparaison des différents paramètres de la loi $K1$ (un point = une année ≈ 250 jours) :

(a) Médiane et moyenne - (b) κ et kurtosis - (c) κ et ratio γ/σ

Fonctions puissance asymétriques - K2

Nous appelons *fonctions puissance* les fonctions positives qui vérifient l'équation :

Fonctions puissance

$$\left(y^{1/\alpha} + \frac{X - \mu}{\kappa\gamma} \right) y^{1/\omega} = 1 \quad (4)$$

où κ est la moyenne harmonique de α et ω telle que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\omega} \right)$

Nous appelons *loi K2* la fonction de répartition F et la fonction de densité f construites selon :

$$p = F(X) = \frac{1}{1+y} \quad \text{et} \quad f(X) = \frac{dF(X)}{dX} \quad (5)$$

X s'exprime aisément en fonction de y et de p . Comme $y = \frac{1-p}{p}$ et $\log(y) = -\text{logit}(p)$, il vient :

$$X = \mu + \gamma\kappa \left(-y^{1/\alpha} + y^{-1/\omega} \right) = \mu + \gamma\kappa \left(-\left(\frac{p}{1-p} \right)^{-1/\alpha} + \left(\frac{p}{1-p} \right)^{1/\omega} \right)$$

Quantile de la loi K2

$$X(p; \mu, \gamma, \alpha, \omega) = \mu + \gamma\kappa \left(-e^{\frac{-\text{logit}(p)}{\alpha}} + e^{\frac{\text{logit}(p)}{\omega}} \right) \quad (6)$$

Modèles K3 et K4 : autre forme de K2 et extension de K1

α et ω sont naturellement très corrélés dans le modèle K2. Considérons les termes ϵ et δ :

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\omega} \right) \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\epsilon}{\kappa} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\omega} \right)$$

Il vient :

Conversion de α et ω de et vers κ , δ et ϵ

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\kappa} - \delta \quad \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\kappa} + \delta \quad \epsilon = \frac{\alpha - \omega}{\alpha + \omega} \quad \alpha = \frac{\kappa}{1 - \epsilon} \quad \omega = \frac{\kappa}{1 + \epsilon} \quad (7)$$

$-1 < \epsilon < 1$ est une mesure de l'**excentricité** du modèle. On peut l'écrire en %
 $\frac{-1}{\kappa} < \delta < \frac{1}{\kappa}$ est une mesure de la **distorsion** du modèle. On peut l'écrire en % ou en ‰

Réécrivons le modèle K2 :

Quantile des lois K3 et K4

$$\begin{cases} X(p; \mu, \gamma, \kappa, \delta) = \mu + 2\gamma\kappa \sinh\left(\frac{\text{logit}(p)}{\kappa}\right) e^{\delta \text{logit}(p)} \\ X(p; \mu, \gamma, \kappa, \epsilon) = \mu + 2\gamma\kappa \sinh\left(\frac{\text{logit}(p)}{\kappa}\right) e^{\frac{\epsilon}{\kappa} \text{logit}(p)} \end{cases} \quad (8)$$

On notera $e^{\delta \text{logit}(p)} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\delta}$

Modèles asymétriques (K2, K3, K4)

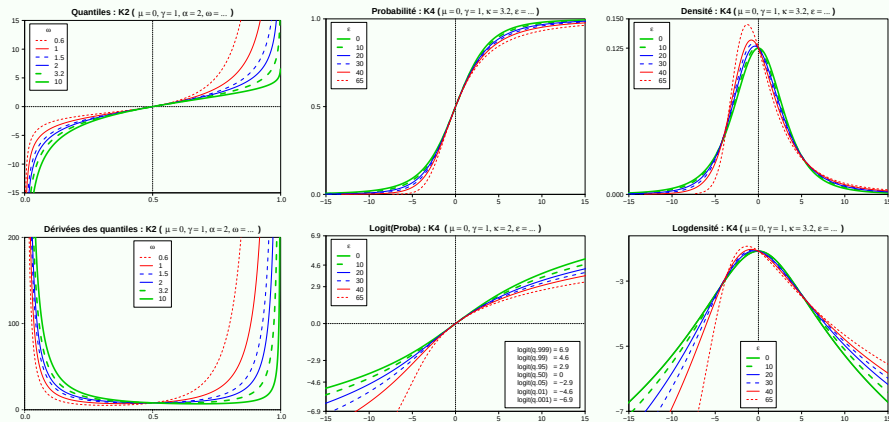


FIGURE : Modèles K2 et K3 : (a) Quantiles - (b) Probabilités (c) Densités
(d) Dérivées de la loi du quantile - (e) Logit des probabilités - (f) Logdensités

Comparaison avec la loi de Student décentrée

Loi de Student décentrée à ν degrés de liberté et de paramètre de décentrement μ :

$$F_{\nu, \mu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-\mu\sqrt{2})^j e^{-\frac{\mu^2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{j+1}{2})}{\Gamma(1/2)} I\left(\frac{\nu}{\nu+x^2}; \frac{\nu}{2}, \frac{j+1}{2}\right), & x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-\mu\sqrt{2})^j e^{-\frac{\mu^2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{j+1}{2})}{\Gamma(1/2)} I\left(\frac{\nu}{\nu+x^2}; \frac{\nu}{2}, \frac{j+1}{2}\right), & x < 0 \end{cases}$$

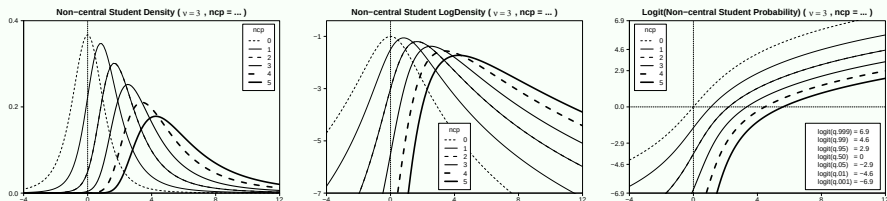


FIGURE : Lois de Student décentrées ($\nu = 3$, $ncp = 0, 1, 2, 4, 5$)
(a) Densités - (b) Logdensités - (c) Logit(Probabilités)

- Le paramètre de décentrement μ peut prendre des valeurs réelles, positives ou négatives
- Les paramètres ν et μ influent **simultanément** sur les queues de distribution ET sur le mode, la médiane et la moyenne

Processus asymétriques ($\kappa = 2, 3.2, 5, 10$) $\times(\delta = -0.04, -0.08, -0.12)$

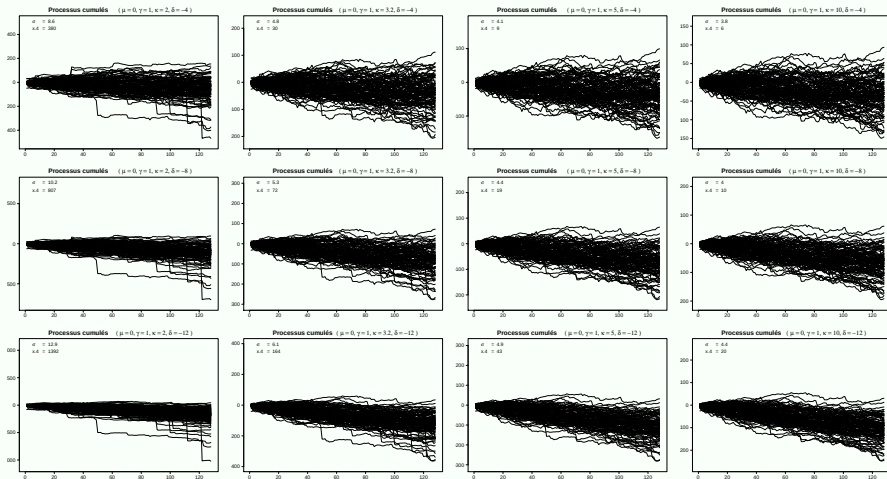


FIGURE : Processus cumulés : (a) $\kappa = 2$ (b) $\kappa = 3.2$ (c) $\kappa = 5$ (d) $\kappa = 10$

Euro-Dollar : $\alpha = 9.1$, $\omega = 8.1$, $\epsilon = 6\%$, asymétrie multi-échelle

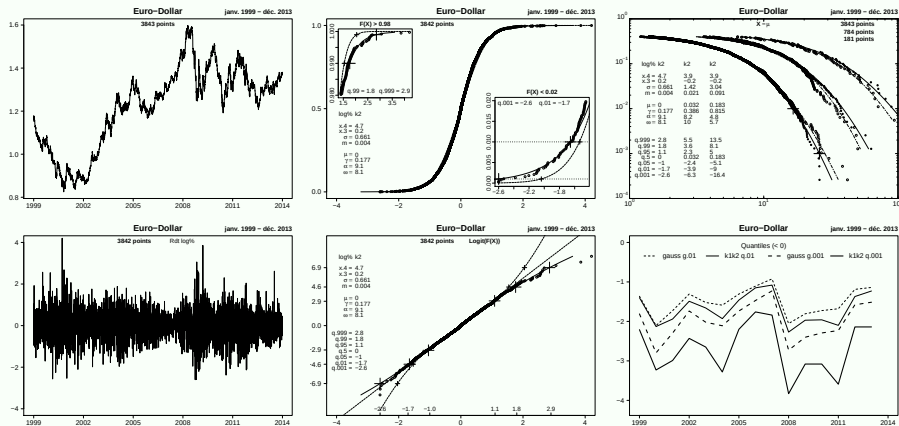


FIGURE : (a) Cours de Euro-Dollar - (b) 100xlog-rendement de Euro-Dollar
(c) Fonction de répartition empirique ($\alpha > \kappa > \omega$) - (d) Logit de la fonction de répartition empirique
(e) Fonction de répartition empirique en échelle Log-Log sur période jour, semaine, mois
(f) Risques à 1% et 1‰ sur une période annuelle (250 jours) glissante selon la Gaussienne et la loi K2

VIX : $\alpha = 5$, $\omega = 4$, $\epsilon = 11\%$, forte asymétrie multi-échelle

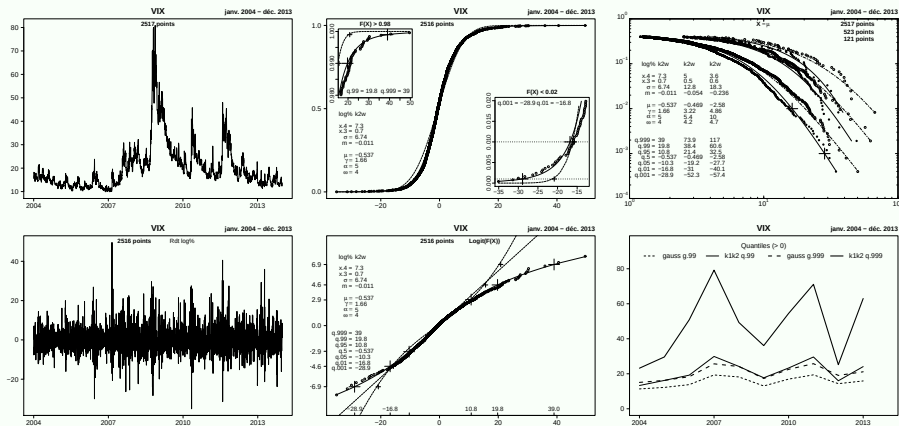


FIGURE : (a) Cours du VIX - (b) 100xlog-rendement du VIX
 (c) Fonction de répartition empirique ($\alpha > \kappa > \omega$) - (d) Logit de la fonction de répartition empirique
 (e) Fonction de répartition empirique en échelle Log-Log sur période jour, semaine, mois
 (f) Risques à 1% et 1‰ sur une période annuelle (250 jours) glissante selon la Gaussienne et la loi K2

Divers

- `kashp(x, k = 1)`, `ashp`, `dkashp_dx`, `invlogit(x)`, `logit(p)`

Hyperboles puissance, fonctions puissance hyperboliques et leurs inverses

- `exphp(x, k = 1)`, `coshp`, `sinhp`, `tanhp`, `sechp`, `cosechp`, `cotanhp`
- `loghp(x, k = 1)`, `acoshp`, `asinhp`, `atanhp`, `asechp`, `acosechp`, `acotanhp`

Fonctions symétriques Logishp et Kiener1, sans ou avec paramètres m et g

- `d,p,q,r logishp(xqpn, k = 1)`
- `d,p,q,r kiener1(xqpn, m = 0, g = 1, k = 3.2)`

Fonctions asymétriques Kiener2, Kiener3, Kiener4

- `q,r kiener2(pn, m = 0, g = 1, a = 3.2, w = 3.2)`
- `q,r kiener3(pn, m = 0, g = 1, k = 3.2, d = 0)`
- `q,r kiener4(pn, m = 0, g = 1, k = 3.2, e = 0)`

Estimation paramétrique

- `laplacegaussnorm(X)`
- `regkienerLX(X, model = "k4", dgts = c(3, 3, 1, 1, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 2),
maxk = 10, mink = 0.7, app = 0)`

⇒ Disponible sur le CRAN :

<http://cran.r-project.org/web/packages/FatTailsR/index.html>

Package FatTailsR : *regkienerLX* et indice SMI

```
> library(FatTailsR)
> price2returns <- function(x) { 100*diff(log(x)) }
> j <- 2 # 1=DAX, 2=SMI, 3=CAC, 4=FTSE
> X <- price2returns(EuStockMarkets[,2])
> reg <- regkienerLX( X, model = "k2" )
> attributes(reg)
$names
 [1] "dfrXP" "dfrXL" "dfrXR" "dfrEP" "dfrEL" "dfrED" "regk0" "coefk0" "vcovk0"
[10] "vcovk0m" "mcork0" "coefk" "coefk1" "coefk2" "coefk3" "coefk4" "quantk" "coefr"
[19] "coefr1" "coefr2" "coefr3" "coefr4" "quantr" "dfrQkPk" "dfrQkLk"

$class
[1] "clregk"

> reg$coefr2
      m      g      a      w
0.089 0.223 3.800 4.400

> reg$coefr
      m      g      a      k      w      d      e
0.089 0.223 3.800 4.100 4.400 -0.018 -0.070

> reg$quantr
q.0001 q.0005 q.001 q.005 q.01 q.05 q.50 q.95 q.99 q.995 q.999 q.9995 q.9999
-10.00 -6.44 -5.30 -3.29 -2.63 -1.42 0.09 1.44 2.39 2.88 4.29 5.06 7.33
```

Conclusion

Nous avons présenté :

- les hyperboles puissance, les fonctions puissance et des nouvelles distributions adaptées aux queues épaisses qui utilisent la **médiane** comme valeur pivot
 - le modèle symétrique est explicite pour toutes les représentations (pdf, cdf, quantiles, ...)
 - le modèle asymétrique possède une loi du quantile explicite
- une modélisation très précise des distributions des rendements et risques
- un nouveau package : **FatTailsR**

Des questions ouvertes :

- **fonctions caractéristiques**, moments, prior et posterior bayésiens
- modèles multivariés, copules. Mais quel **produit scalaire** et quelle **corrélation** ?

Corrélation du paramètre central γ , du paramètre de queue κ ou du quantile $q_1\%$?

- **processus stochastiques**. Ici, $\mu\gamma\kappa\epsilon$ n'est pas $m\sigma$!!

Quel nom pour ces processus : $\mu\gamma\kappa\epsilon$ -Garch ou peut-être Garck ?

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_m dt + \gamma dW_t \quad \text{avec} \quad dW_t \approx 2\kappa \sinh\left(\frac{\text{logit}(p_t)}{\kappa}\right) e^{\frac{\epsilon}{\kappa} \text{logit}(p_t)}$$

- les variations des paramètres (γ/σ , κ) vus à la diapositive 20 peuvent-elles expliquer le **smile de volatilité** des produits dérivés ?

Perspectives d'applications :

- risques de marché (Bâle III, bcbs240, jan. 2013), gestion de portefeuille, produits dérivés, ...
- enrichir le package

- 1 B. Mandelbrot, Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 254, (1962) 3968-3970 (reprinted in Fractales, hasard et finance, Flammarion, 2009).
- 2 J-P. Bouchaud, M. Potters, Théorie des risques financiers, CEA Aléa Saclay, 1997.
- 3 L. De Haan, On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes, Mathematical Centre Tracts vol. 32, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1970.
- 4 The R Project for Statistical Computing, <http://www.r-project.org>
- 5 Rmetrics, <http://www.rmetrics.org>
- 6 8th R/Rmetrics Workshop and Summer School, <https://sites.google.com/site/rmetricsparis2014/>

Package **FatTailsR**

- Version 1.0-3 (14 juillet 2014) disponible sur le CRAN :
<http://cran.r-project.org/web/packages/FatTailsR/index.html>

Pour citer et télécharger ce document (seule la version anglaise a été présentée) :

- P. Kiener, Explicit models for bilateral fat-tailed distributions and applications in finance with the package FatTailsR, 8th R/Rmetrics Workshop and Summer School, Paris, 27 June 2014.
<http://www.inodelia.com/fattailsr-en.html>



Merci pour votre attention !

`patrice.kiener@inmodelia.com`

Tél. : +33.9.53.45.07.38